В 2018 году в Отделе математики и информатики Дагестанского научного цен­

тра РАН проведены научно-исследовательские работы по теме «Функциональные про­

странства с переменным показателем и их приложения. Некоторые вопросы теории

приближений полиномами, рациональными функциями, сплайнами и вейвлетами».

В отчетном году было показано, что функция Лебега

Λ 𝛽

𝑜,𝑛 (𝑦) = Λ

𝛽

𝑜,𝑛 (𝑦) = (1 − 𝑦

2 )

∫︁

1

−1

(1 − 𝑢 2 ) 𝛽−1

⃒

1

𝑛 + 1

𝑜+𝑛

∑︁

𝑙=𝑜

𝐿 𝛽

𝑙−2 (𝑦,𝑢)

⃒𝑒𝑢,

средних Валле Пуссена

𝑊

𝛽

𝑜,𝑛 (𝑕) = 𝑊

𝛽

𝑜,𝑛 (𝑕,𝑦) =

1

𝑛 + 1 [𝜏

𝛽

𝑜 (𝑕,𝑦) + ··· + 𝜏

𝛽

𝑜+𝑛 (𝑕,𝑦)]

равномерно ограничена по норме пространства 𝐷[−1;1] при

1

2

≤ 𝛽 <

3

2 , 𝑑 1 𝑛 ≤ 𝑜 ≤ 𝑑 2 𝑛.

Используя неравенство Лебега и равномерную ограниченность функции Λ 𝛽

𝑜,𝑛 (𝑦), нами

получена оценка отклонения средних 𝑊

𝛽

𝑜,𝑛 (𝑕) от функции 𝑕 ∈ 𝐷[−1,1].

Были изучены аппроксимативные свойства частичных сумм 𝜏 𝛽,𝑠

𝑜

(𝑕) специального

ряда

𝑕(𝑦) = 𝑚 2𝑠−1 (𝑕)(𝑦) + (1 − 𝑦 2 ) 𝑠

∞

∑︁

𝑙=0

𝑟 𝛽

𝑠,𝑙

^

𝑄

𝛽

𝑙 (𝑦)

в весовых пространствах Лебега с переменным показателем. Получены оценки откло­

нения 𝜏 𝛽,𝑠

𝑜

(𝑕) от функции 𝑕 (теоремы 2.5 и 2.6).

В теоремах 3.1 и 3.2 было показано, что интерполяционные рациональные сплайн­

функции 𝑆 𝑂,1 (𝑦) позволяют при выполнении определенных условий (приведенных в

формулировках этих теорем) интерполировать дискретные функции с сохранением фор­

мы ковыпуклости.

Ранее в работах [34,55–57] для рациональных сплайн-функций 𝑆 𝑂,1 (𝑦) исследова­

ны их аппроксимативные свойства (в частности, доказана безусловная сходимость для

функций и производных, получены оценки скорости сходимости), а также исследованы

вопросы отсутствия или наличия явления Гиббса.

Отметим, что найдены приложения рациональных сплайн-функций 𝑆 𝑂,1 (𝑦) к

приближенному решению начальных и краевых задач для дифференциальных уравне­

ний.

Выше теоремы 3.1 и 3.2 получены для сплайн-функций 𝑆 𝑂,1 (𝑦) класса 𝐷 1

[𝑏,𝑐] . Тео­

рема 4.1 представляет собой аналог теоремы 3.1 для сплайн-функций 𝑆 𝑂,2 (𝑦) класса

𝐷 2

[𝑏,𝑐] . При этом теорема 3.1 справедлива при условии 1/2 < 𝑟 𝑗

< 2, тогда как теорема

4.1 справедлива при более слабом условии 𝑑 < 𝑟 𝑗 < 1/𝑑 для 𝑑 = (2 √ 2 + 1)/(2 √ 2 + 5).

Однако остается открытым вопрос о справедливости аналога теоремы 3.2 для

сплайн-функций 𝑆 𝑂,2 (𝑦).

34

Исследовано поведение функции Лебега сумм Фурье по модифицированным по­

линомам Мейкснера 𝑛 𝛽

𝑜,𝑂 (𝑦), 𝛽 > −1. При соблюдении условий, указанных в теореме

5.1, получена верняя оценка для функции Лебега для 𝑦 ∈

[︀ 𝜄

𝑜

2

,∞ )︀ . Этот результат яв­

ляется обобщением (относительно параметра 𝛽) результатов, полученных в работе [37].

Далее для произвольного натурального 𝑠 и функции 𝑔 из пространства 𝑚 2

𝜍 𝑂 (Ω 𝜀 ) постро­

ены специальные ряды по полиномам 𝑛 𝛽

𝑜,𝑂 (𝑦). Рассмотрена задача об исследовании

аппроксимативных свойств частичных сумм специального ряда с уделением основного

внимания на получение поточечной оценки для соответствующей функции Лебега. При

этом отметим, что частичные суммы этих рядов, в отличие от сумм Фурье по тем же

полиномам, совпадают с значениями исходной функции 𝑔 в точках {0,𝜀,2𝜀,...,(𝑠−1)𝜀}.

Были исследованы аппроксимативные свойства полиномов 𝑀 𝑜,𝑂 (𝑔,𝑦), обладаю­

щих наименьшим квадратическим отклонением от функции 𝑔 относительно системы

{𝑢 𝑙 } 𝑂−1

𝑙=0

, при приближении некоторых классов 2𝜌-периодических кусочно-гладких функ­

ций. А именно, были найдены неулучшаемые по порядку оценки для величины

|𝑔(𝑦) − 𝑀 𝑜,𝑂 (𝑔,𝑦)|, когда 𝑔 — кусочно-гладкая функции с разрывами первого рода, об­

ладающая абсолютно непрерывной производной на кусках, а также, когда 𝑔 — непре­

рывная кусочно-гладкия функция с двумя абсолютно непрерывными производными на

кусках. Данные оценки приведены в теоремах 7.1 и 7.2.